INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
UNIDAD ZACATENCO

INGENIERÍA CIVIL

ASIGNATURA:

MATEMÁTICAS II

IMPARTE:

ING. MAURICIO SUÁREZ LEDEZMA

La Técnica al Servicio de la Patria

MAYO 2006

COEFICIENTES HOMOGÉNEOS

Considérese una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ donde g es una función del cociente y/x.

Para que en esta ecuación sea posible separar las variables es necesario definir la siguiente transformación de variables:

$$v = \frac{y}{x}$$

o en forma equivalente $y = vx$

Lo que permite cambiar la variable dependiente "*y*" por "*v*", pero manteniendo como variable independiente a "*x*". Si se deriva esta última ecuación con respecto a "*x*" se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

Comparando este resultado con la ecuación original, se observa que ambas ecuaciones representan a dy/dx e igualándolas se obtiene:

$$v + x\frac{dv}{dx} = g(v)$$

La cual puede resolverse mediante separación de variables de la siguiente forma:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{g(v) - v}$$

Finalmente se reexpresa la solución en términos de la variable dependiente inicial (y).

EJERCICIOS

ÍNDICE

¿Dudas?

¿Dudas?

EJEMPLO:

Determinar la solución general de

$$\left(x^2 - xy + y^2\right)dx - (xy)dy = 0$$

SOLUCIÓN (Opción 1).

Verificando que los coeficientes de las diferenciales sean funciones homogéneas:

$$M(x,y) = x^2 - xy + y^2 \qquad ; \qquad N(x,y) = -xy$$

$$M(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2$$

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2\left(x^2 - xy + y^2\right) = \lambda^2 M(x,y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = -(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(-xy) = \lambda^2 N(x,y)$$

Ya que son homogéneas y del mismo grado (2) cualquiera de las sustituciones y=vx ó x=vy son posibles.

Considerando que y=vx y dy=vdx+xdv ...

$$\left[x^2 - x(vx) + (vx)^2\right]dx - x(vx)[vdx + xdv] = 0$$

$$\left(x^2 - x^2v + v^2x^2\right)dx - x^2v^2dx - x^3vdv = 0$$

$$\left(x^2 - x^2v + v^2x^2 - x^2v^2\right)dx - x^3vdv = 0$$

$$\left(x^2 - x^2v\right)dx - x^3vdv = 0$$

$$x^2(1-v)dx - x^3vdv = 0$$

$$x^2(1-v)dx = x^3vdv$$

$$\frac{x^2}{x^3}dx = \frac{v}{1-v}dv$$

$$\int \frac{x^2}{x^3}dx = \int \frac{v}{1-v}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{v}{1-v}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{-v}{1-v}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{-v+1-1}{1-v}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{1-v-1}{1-v}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{1-v}{1-v}dv - \int \frac{-1}{1-v}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int dv - \int \frac{-dv}{1-v}$$

$$\ln(x) = -v - \ln(1-v) + c$$

$$\ln(x) + v + \ln(1-v) = c$$

ATRÁS

ADELANTE

COEFICIENTES HOMOGÉNEOS

$$\ln\left[x(1-v)\right] + v = c$$

$$e^{\ln\left[x(1-v)\right]+v} = e^{c}$$

$$e^{\ln\left[x(1-v)\right]}e^{v} = e^{c}$$

$$x(1-v)e^{v} = e^{c}$$

$$x(1-v)e^{v} = c_2$$

$$x\left(1-\frac{y}{x}\right)e^{y/x} = c_2$$

$$(x-y)e^{y/x} = c_2$$

$\therefore$

La solución general es

$$(x\text{-}y)e^{y/x} = c$$

SOLUCIÓN (Opción 2).

Verificando que los coeficientes de las diferenciales sean funciones homogéneas:

$$M(x,y) = x^2 - xy + y^2 \qquad ; \qquad N(x,y) = -xy$$

$$M(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x)^2 - (\lambda x)(\lambda y) + (\lambda y)^2$$

$$M(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2\left(x^2 - xy + y^2\right) = \lambda^2 M(x,y)$$

$$N(\lambda x,\lambda y) = -(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(-xy) = \lambda^2 N(x,y)$$

Ya que son homogéneas y del mismo grado (2) cualquiera de las sustituciones y=vx ó x=vy son posibles.

Considerando que x=vy y dx=vdy+ydv ...

$$\left[(vy)^2 - (vy)y + y^2\right](vdy + ydv) - (vy)ydy = 0$$

$$\left(v^2y^2 - vy^2 + y^2\right)(vdy + ydv) - vy^2dy = 0$$

$$v^3y^2dy + v^2y^3dv - v^2y^2dy - vy^3dv + y^2vdy + y^3dv - vy^2dy = 0$$

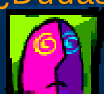
$$\left(v^3y^2 - v^2y^2 + y^2v - vy^2\right)dy + \left(v^2y^3 - vy^3 + y^3\right)dv = 0$$

$$\left(v^3y^2 - v^2y^2\right)dy + \left(v^2y^3 - vy^3 + y^3\right)dv = 0$$

$$y^2\left(v^3 - v^2\right)dy + y^3\left(v^2 - v + 1\right)dv = 0$$

ATRÁS ADELANTE

¿Dudas?



¿Dudas?

Separando variables...

$$\frac{y^2}{y^3}dy = -\frac{v^2 - v + 1}{v^3 - v^2}dv$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{v^2 - v + 1}{v^3 - v^2}dv$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{v^2 - v + 1}{v^3 - v^2}dv$$

Para resolver la integral del miembro derecho se aplica una descomposición en fracciones; esto es

$$\frac{v^2 - v + 1}{v^2(v-1)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{v-1}$$

$$v^2 - v + 1 = \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{v-1}\right)v^2(v-1)$$

$$v^2 - v + 1 = Av(v-1) + B(v-1) + Cv^2$$

$$v^2 - v + 1 = Av^2 - Av + Bv - B + Cv^2$$

$$v^2 - v + 1 = (A + C)v^2 + (-A + B)v + (-B)$$

Ahora, para que el miembro izquierdo sea efectivamente igual al miembro derecho, se establecen las siguientes condiciones:

$$A + C = 1$$

$$-A + B = -1$$

$$-B = 1$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales se obtiene que:

$$A = 0 \quad ; \quad B = -1 \quad ; \quad C = 1$$

Por lo que

$$\frac{v^2 - v + 1}{v^2(v-1)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{v-1} = -\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v-1}$$

De manera que lo que se integrará ahora es:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{v^2}dv - \int \frac{1}{v-1}dv$$

O bien,

$$\int \frac{dy}{y} = \int v^{-2}dv - \int \frac{dv}{v-1}$$

ATRÁS ADELANTE

¿Dudas?

Resolviendo...

$$\ln(y) = \frac{v^{-1}}{-1} - \ln(v-1) + c$$

$$\ln(y) = -\frac{1}{v} - \ln(v-1) + c$$

$$\ln(y) + \ln(v-1) + \frac{1}{v} = c$$

$$\ln[y(v-1)] + \frac{1}{v} = c$$

$$e^{\ln[y(v-1)] + \frac{1}{v}} = e^{c}$$

$$e^{\ln[y(v-1)]} e^{1/v} = e^{c}$$

$$y(v-1)e^{1/v} = e^{c}$$

$$y\left(\frac{x}{y} - 1\right)e^{y/x} = e^{c}$$

$$(x-y)e^{y/x} = c_2$$

$\therefore$

La solución general es

$$(x-y)e^{y/x} = c$$

EJERCICIO 1:

Determinar la solución general de

$$\left[x\csc\left(\frac{y}{x}\right) - y\right]dx + xdy = 0$$

SOLUCIÓN.

Verificando que los coeficientes de las diferenciales sean funciones homogéneas:

$$M(x,y) = x\csc\left(\frac{y}{x}\right) - y \quad ; \quad N(x,y) = x$$

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \csc\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) - \lambda y = \lambda\left[x\csc\left(\frac{y}{x}\right) - y\right] = \lambda M(x,y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x = \lambda N(x,y)$$

Ya que son homogéneas y del mismo grado (1) cualquiera de las sustituciones y=vx ó x=vy son posibles.

Considerando que y=vx y dy=vdx+xdv ...

$$\left[x\csc\left(\frac{vx}{x}\right) - vx\right]dx + x(vdx + xdv) = 0$$

ATRÁS ADELANTE

ÍNDICE

¿Dudas?

$$\left[x\csc(v) - vx\right]dx + xvdx + x^2dv = 0$$
$$\left[x\csc(v) - vx + xv\right]dx + x^2dv = 0$$
$$x\csc(v)dx + x^2dv = 0$$

Separando variables...

$$x\csc(v)dx = -x^2dv$$
$$\frac{x}{x^2}dx = -\frac{dv}{\csc(v)}$$
$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{dv}{\csc(v)}$$

Resolviendo...

$$\int\frac{dx}{x} = -\int \operatorname{sen}(v)dv$$
$$\ln(x) = \cos(v) + C$$
$$\ln(x) = \cos(v) + \ln(C_2)$$
$$\ln(x) - \ln(C_2) = \cos(v)$$
$$\ln\left(\frac{x}{C_2}\right) = \cos(v)$$

$\therefore$ La solución general es

$$\ln\left(\frac{x}{C}\right) = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

EJERCICIO 2:

Determinar la solución general de

$$\left[x - y\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx + x\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

SOLUCIÓN.

Verificando que los coeficientes de las diferenciales sean funciones homogéneas:

$$M(x,y) = x - y\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \quad ; \quad N(x,y) = x\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x - \lambda y\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \lambda M(x,y)$$
$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x\operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \lambda N(x,y)$$

Ya que son homogéneas y del mismo grado (1) cualquiera de las sustituciones y=vx ó x=vy son posibles.

Considerando que y=vx y dy=vdx+xdv ...

$$\left[x - vx\operatorname{arctg}\left(\frac{vx}{x}\right)\right]dx + \left[x\operatorname{arctg}\left(\frac{vx}{x}\right)\right](vdx + xdv) = 0$$

ATRÁS ADELANTE

¿Dudas?

$$xdx + x^2 \operatorname{arctg}(v)dv = 0$$

Separando variables...

$$xdx = -x^2 \operatorname{arctg}(v)dv$$

$$\frac{dx}{x} = -\operatorname{arctg}(v)dv$$

Resolviendo...

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \operatorname{arctg}(v)dv$$

$$\ln(x) = -\left[v \operatorname{arctg}(v) - \frac{1}{2}\ln\left(1+v^2\right)\right] + C$$

$$\ln(x) = -v \operatorname{arctg}(v) + \frac{1}{2}\ln\left(1+v^2\right) + C$$

$$\ln(x) + v \operatorname{arctg}(v) = \frac{1}{2}\ln\left(1+v^2\right) + C$$

$$\ln(x) + v \operatorname{arctg}(v) = \frac{1}{2}\ln\left(1+v^2\right) + \frac{1}{2}C_2$$

$$\ln(x) + \frac{y}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + \frac{1}{2}C_2$$

$$2\ln(x) + 2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + C_2$$

$$2\ln(x) + 2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) + \ln(C_3)^2$$

$$2\ln(x) + 2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) + \ln(C_3)^2$$

$$2\ln(x) + 2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) + \ln(C_3)^2$$

$$2\ln(x) + 2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{(C_3)^2(x^2+y^2)}{x^2}\right)$$

$$2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{(C_3)^2(x^2+y^2)}{x^2}\right) - 2\ln(x)$$

$$\frac{2y}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{(C_3)^2(x^2+y^2)}{x^2}\right) - \ln\left(x^2\right)$$

$$\frac{2y}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\frac{\frac{(C_3)^2(x^2+y^2)}{x^2}}{x^2}\right)$$

ATRÁS ADELANTE

$$\frac{2y}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=\ln\left(\frac{(C_3)^2(x^2+y^2)}{x^4}\right)$$

$$2y\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=x\ln\left(\frac{(C_3)^2(x^2+y^2)}{x^4}\right)$$

$\therefore$

La solución general puede expresarse como :

$$2y\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=x\ln\left(\frac{C^2(x^2+y^2)}{x^4}\right)$$

EJERCICIO 3:

Determinar la solución general de

$$(xy)dx+(x^2+y^2)dy=0$$

SOLUCIÓN (Opción 1).

Verificando que los coeficientes de las diferenciales sean funciones homogéneas:

$$M(x,y)=xy \quad ; \quad N(x,y)=x^2+y^2$$

$$M(\lambda x,\lambda y)=\lambda x\lambda y=\lambda^2 M(x,y)$$

$$N(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2+\lambda^2y^2=\lambda^2 N(x,y)$$

Ya que son homogéneas y del mismo grado (2) cualquiera de las sustituciones y=vx ó x=vy son posibles.

Considerando que y=vx y dy=vdx+xdv ...

$$[x(vx)]dx+\left[x^2+(vx)^2\right][vdx+xdv]=0$$

$$(x^2v)dx+x^2(1+v^2)(vdx+xdv)=0$$

$$x^2\left[vdx+(1+v^2)(vdx+xdv)\right]=0$$

¿Dudas?

ÍNDICE

¿Dudas?

$$vdx+(1+v^2)(vdx+xdv)=0$$

$$vdx+vdx+xdv+v^3dx+v^2xdv=0$$

$$(v+v+v^3)dx+(x+v^2x)dv=0$$

$$(2v+v^3)dx+x(1+v^2)dv=0$$

$$v(2+v^2)dx+x(1+v^2)dv=0$$

$$v(2+v^2)dx=-x(1+v^2)dv$$

$$\frac{dx}{x}=-\frac{1+v^2}{v(2+v^2)}dv$$

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{1+v^2}{v(2+v^2)}dv$$

Para resolver la integral del miembro derecho se aplica una descomposición en fracciones; esto es

$$\frac{1+v^2}{v(2+v^2)}=\frac{A}{v}+\frac{Bv+D}{(2+v^2)}$$

$$1+v^2=\left[\frac{A}{v}+\frac{Bv+D}{(2+v^2)}\right]v(2+v^2)$$

$$1+v^2=A(2+v^2)+Bv^2+Dv$$

$$1+v^2=2A+Av^2+Bv^2+Dv$$

$$1+v^2=(A+B)v^2+Dv+2A$$

Ahora, para que el miembro izquierdo sea efectivamente igual al miembro derecho, se establecen las siguientes condiciones:

$$A+B=1$$

$$D=0$$

$$2A=1$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones lineales se obtiene que:

$$A=\frac{1}{2}\quad;\quad B=\frac{1}{2}\quad;\quad D=0$$

Por lo que

$$\frac{1+v^2}{v(2+v^2)}=\frac{A}{v}+\frac{Bv+D}{(2+v^2)}=\frac{1}{2v}+\frac{v}{2(2+v^2)}$$

De manera que lo que se integrará ahora es:

$$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{dv}{2v}-\int\frac{v}{2(2+v^2)}dv$$

O bien,

$$\int\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{v}-\frac{1}{2}\int\frac{v}{(2+v^2)}dv$$

ATRÁS ADELANTE

ÍNDICE

¿Dudas?

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} - \frac{1}{2}\int \frac{2v}{2\left(2+v^2\right)}dv$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} - \frac{1}{4}\int \frac{2v}{\left(2+v^2\right)}dv$$

$$\ln(x) = -\frac{1}{2}\ln(v) - \frac{1}{4}\ln\left(2+v^2\right) + C$$

$$4\ln(x) = -2\ln(v) - \ln\left(2+v^2\right) + 4C$$

$$\ln\left(x^4\right) = -\ln\left(v^2\right) - \ln\left(2+v^2\right) + C_2$$

$$\ln\left(x^4\right) + \ln\left(v^2\right) + \ln\left(2+v^2\right) = C_2$$

$$\ln\left[x^4 v^2\left(2+v^2\right)\right] = C_2$$

$$e^{\ln\left[x^4 v^2\left(2+v^2\right)\right]} = e^{C_2}$$

$$x^4 v^2\left(2+v^2\right) = C_2$$

$$x^4\left(\frac{y}{x}\right)^2\left[2+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = C_2$$

$$\frac{x^4 y^2}{x^2}\left[\frac{2x^2+y^2}{x^2}\right] = C_2$$

$$y^2\left[2x^2+y^2\right] = C_2$$

$$2(xy)^2 + y^4 = C_2$$

$\therefore$ La solución general puede expresarse como

$$2(xy)^2 + y^4 = C$$

SOLUCIÓN (Opción 2).

Verificando que los coeficientes de las diferenciales sean funciones homogéneas:

$$M(x,y) = xy \qquad ; \qquad N(x,y) = x^2 + y^2$$

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \lambda y = \lambda^2 M(x,y)$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 N(x,y)$$

Ya que son homogéneas y del mismo grado (2) cualquiera de las sustituciones y=vx ó x=vy son posibles.

Considerando que x=vy y dx=vdy+ydv ...

$$[(vy)y](vdy + ydv) + \left[(vy)^2 + y^2\right]dy = 0$$

$$\left(vy^2\right)(vdy + ydv) + \left[(vy)^2 + y^2\right]dy = 0$$

$$v^2 y^2 dy + vy^3 dv + \left[(vy)^2 + y^2\right]dy = 0$$

$$vy^3 dv + \left[(vy)^2 + y^2 + v^2 y^2\right]dy = 0$$

$$vy^3 dv + \left[2v^2 y^2 + y^2\right]dy = 0$$

$$vy^3 dv = -\left[2v^2 y^2 + y^2\right]dy$$

$$vy^3 dv = -y^2\left[2v^2 + 1\right]dy$$

ATRÁS ADELANTE

$$\frac{v}{2v^2+1}dv = -\frac{y^2}{y^3}dy$$

$$\int \frac{v}{2v^2+1}dv = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{4v}{2v^2+1}dv = -\int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{1}{4}\ln\left(2v^2+1\right) = -\ln(y)+C$$

$$\ln\left(2v^2+1\right) = -4\ln(y)+4C$$

$$\ln\left(2v^2+1\right)+4\ln(y) = 4C$$

$$\ln\left(2v^2+1\right)+\ln(y)^4 = 4C$$

$$\ln\left[\left(2v^2+1\right)y^4\right] = 4C$$

$$e^{\ln\left[\left(2v^2+1\right)y^4\right]} = e^{4C}$$

$$\left(2v^2+1\right)y^4 = C_2$$

$$\left[2\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right]y^4 = C_2$$

$\therefore$ La solución general puede expresarse como:

$$2(xy)^2 + y^4 = C$$

¿Dudas?

ATRÁS

EXACTAS

Considérese una ecuación diferencial de primer orden con la siguiente forma

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F(x,y)}{G(x,y)}$$

la cual también puede expresarse como

$$F(x)dx + G(y)dy = 0$$

Si el miembro izquierdo de esta ecuación representa a la diferencial total de una función U(x,y), entonces se tiene que

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy$$

Comparando las dos últimas ecuaciones se obtiene

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = F(x,y) \quad , \quad \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = G(x,y) \quad \text{y} \quad \partial U = 0$$

Y de la teoría del cálculo diferencial de campos escalares surge que, para este tipo de situaciones, se debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

¿Dudas?

EXACTAS

que en forma equivalente sería: $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$

La cual representa la condición para determinar si una ecuación diferencial es exacta.

Por lo tanto, si una ecuación diferencial es exacta, entonces por definición existe una función U(x,y) tal que $F(x,y)dx + G(x,y)dy = dU$

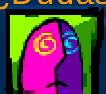
entonces la solución de la ecuación se obtiene mediante $\int F(x,y)dx + \int G(x,y)dy = \int dU$

que finalmente resulta $\int F(x,y)dx + \int G(x,y)dy = C$

¿Dudas?

EJERCICIOS

¿Dudas?



EJEMPLO:

Determinar la solución general de

$$\left(2x^3 - xy^2 - 2y + 3\right)dx - \left(x^2 y + 2x\right)dy = 0$$

SOLUCIÓN (Opción 1).

Si...

$$F(x,y) = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3 \quad \text{y} \quad G(x,y) = -x^2 y - 2x$$

y...

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2xy - 2 \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial x} = -2xy - 2$$

...entonces la ecuación es exacta y cumple con:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F(x,y)$$
$$\partial U = F(x,y)\partial x$$
$$\int \partial U = \int F(x,y)\partial x$$
$$\Rightarrow U = \int F(x,y)\partial x$$

Sustituyendo...

$$U = \int\left(2x^3 - xy^2 - 2y + 3\right)\partial x$$
$$U = 2\int x^3\partial x - y^2\int x\partial x - 2y\int \partial x + 3\int \partial x$$

$$U = 2\int x^3\partial x - y^2\int x\partial x - 2y\int \partial x + 3\int \partial x$$
$$U = 2\frac{x^4}{4} - y^2\frac{x^2}{2} - 2yx + 3x + B(y)$$
$$U = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} - 2yx + 3x + B(y)$$

Considerando ahora que $\dfrac{\partial U}{\partial y} = G(x,y)$

se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 - \frac{x^2 2y}{2} - 2x + 0 + B'(y) = -x^2 y - 2x$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x^2 y - 2x + B'(y) = -x^2 y - 2x$$

Simplificando...

$$B'(y) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \partial B(y) = 0\partial y$$
$$\int \partial B(y) = \int 0\partial y$$
$$B(y) = 0$$

ATRÁS ADELANTE

ÍNDICE

Sustituyendo el valor de B(y) en la función solución U(x,y) se obtiene:

$$U = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} - 2yx + 3x$$

Finalmente, considerando que

$$dU = 0 \quad \text{y} \quad \int dU = C$$

La solución general queda:

$$C = \frac{x^4}{2} - \frac{x^2 y^2}{2} - 2yx + 3x$$

SOLUCIÓN (Opción 2).

Considerando ahora que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = G(x,y)$$

$$\partial U = G(x,y)\partial y$$

$$\int \partial U = \int G(x,y)\partial y$$

$$\Rightarrow U = \int G(x,y)\partial y$$

Sustituyendo...

$$U = \int\left(-x^2 y - 2x\right)\partial y$$

$$U = -x^2 \int y\partial y - 2x\int \partial y$$

$$U = -x^2 \frac{y^2}{2} - 2xy + B(x)$$

Y planteando ahora que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F(x,y)$$

¿Dudas?

ATRÁS ADELANTE

¿Dudas?

Se tiene que:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2x\frac{y^2}{2} - 2y + B'(x) = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3$$

Simplificando

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -xy^2 - 2y + B'(x) = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3$$

$$B'(x) = 2x^3 + 3$$

$$\Rightarrow B(x) = 2\int x^3 \partial x + \int 3\partial x = 2\frac{x^4}{4} + 3x$$

Sustituyendo el valor de B(x) en la función solución U(x,y) se obtiene:

$$U = -x^2\frac{y^2}{2} - 2xy + 2\frac{x^4}{4} + 3x = -\frac{x^2y^2}{2} - 2xy + \frac{x^4}{2} + 3x$$

Finalmente, considerando que

$$dU = 0 \quad \text{y} \quad \int dU = C$$

La solución general queda:

$$C = -\frac{x^2y^2}{2} - 2xy + \frac{x^4}{2} + 3x$$

EJERCICIO 1:

Determinar la solución general de

$$3x(xy-2)dx + \left(x^3 + 2y\right)dy = 0$$

SOLUCIÓN (Opción 1):

Si...

$$F(x,y) = 3x^2y - 6x \quad \text{y} \quad G(x,y) = x^3 + 2y$$

Y...

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 3x^2$$

...entonces la ecuación es exacta y cumple con:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F(x,y)$$

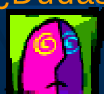
$$\partial U = F(x,y)\partial x$$

$$\int \partial U = \int F(x,y)\partial x$$

$$\Rightarrow U = \int F(x,y)\partial x$$

ATRÁS ADELANTE

¿Dudas?



Sustituyendo...

$$U = \int \left(3x^2 y - 6x\right)\partial x$$

$$U = 3y\int x^2 \partial x - 6\int x\partial x$$

$$U = 3y\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + B(y)$$

$$U = yx^3 - 3x^2 + B(y)$$

Considerando ahora que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = G(x, y)$$

Se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^3 - 0 + B'(y) = x^3 + 2y$$

$$x^3 + B'(y) = x^3 + 2y$$

Simplificando...

$$B'(y) = 2y$$

$$\Rightarrow \quad \partial B(y) = 2y\partial y$$

$$\int \partial B(y) = 2\int y\partial y$$

$$B(y) = y^2$$

Sustituyendo el valor de B(y) en la función solución U(x,y) se obtiene:

$$U = yx^3 - 3x^2 + y^2$$

Finalmente, considerando que

$$dU = 0 \quad \text{y} \quad \int dU = C$$

La solución general queda :

$$C = yx^3 - 3x^2 + y^2$$

ATRÁS ADELANTE

ÍNDICE

SOLUCIÓN (Opción 2).

Considerando ahora que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = G(x,y)$$
$$\partial U = G(x,y)\partial y$$
$$\int \partial U = \int G(x,y)\partial y$$
$$\Rightarrow U = \int G(x,y)\partial y$$

Sustituyendo...

$$U = \int \left(x^3 + 2y\right)\partial y$$
$$U = x^3 \int \partial y + 2\int y\partial y$$
$$U = x^3 y + 2\frac{y^2}{2} + B(x)$$
$$U = x^3 y + y^2 + B(x)$$

Y planteando ahora que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F(x,y)$$

Se tiene que:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 y + 0 + B'(x) = 3x^2 y - 6x$$

Simplificando

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 y + B'(x) = 3x^2 y - 6x$$
$$B'(x) = -6x$$
$$\Rightarrow B(x) = -6\int x\partial x = -6\frac{x^2}{2} = -3x^2$$

Sustituyendo el valor de B(x) en la función solución U(x,y) se obtiene:

$$U = x^3 y + y^2 - 3x^2$$

Finalmente, considerando que

$$dU = 0 \quad \text{y} \quad \int \mathrm{dU} = C$$

La solución general queda :

$$C = x^3 y + y^2 - 3x^2$$

ATRÁS

ADELANTE

¿Dudas?

ÍNDICE

¿Dudas?

EJERCICIO 2:

Determinar la solución general de

$$\left(\operatorname{sen}\theta - 2r\cos^2\theta\right)dr + r\cos\theta(2r\operatorname{sen}\theta + 1)d\theta = 0$$

SOLUCIÓN.

Si...

$$F(r,\theta) = \operatorname{sen}\theta - 2r\cos^2\theta$$

$$G(r,\theta) = 2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta$$

y...

$$\frac{\partial F}{\partial\theta} = \cos\theta + 4r(\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = 4r(\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta$$

...entonces la ecuación es exacta y cumple con:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = F(r,\theta)$$

$$\partial U = F(r,\theta)\partial r$$

$$\int\partial U = \int F(r,\theta)\partial r$$

$$\Rightarrow U = \int F(r,\theta)\partial r$$

Sustituyendo...

$$U = \int\left(\operatorname{sen}\theta - 2r\cos^2\theta\right)\partial r$$

$$U = \operatorname{sen}\theta\int\partial r - 2\cos^2\theta\int r\partial r$$

$$U = \int\left(\operatorname{sen}\theta - 2r\cos^2\theta\right)\partial r$$

$$U = \operatorname{sen}\theta\int\partial r - 2\cos^2\theta\int r\partial r$$

$$U = r\operatorname{sen}\theta - 2\frac{r^2}{2}\cos^2\theta + B(\theta)$$

$$U = r\operatorname{sen}\theta - r^2\cos^2\theta + B(\theta)$$

Considerando ahora que

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = G(r,\theta)$$

se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = r\cos\theta + 2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + B'(\theta)$$

$$r\cos\theta + 2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta$$

Simplificando...

$$B'(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \partial B(\theta) = 0\partial\theta$$

$$\int\partial B(\theta) = \int 0\partial\theta$$

$$B(\theta) = 0$$

ATRÁS ADELANTE

ÍNDICE

Sustituyendo el valor de B(θ) en la función solución U(r,θ) se obtiene:

$$U = r\,\mathrm{sen}\,\theta - r^2 \cos^2 \theta$$

Finalmente, considerando que

$$dU = 0 \quad \text{y} \quad \int dU = C$$

La solución general queda :

$$C = r\,\mathrm{sen}\theta - r^2 \cos^2 \theta$$

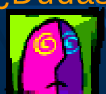
¿Dudas?

ATRÁS

ADELANTE

ÍNDICE

¿Dudas?



EJERCICIO 3:

Determinar la solución general de

$$(2xy - \operatorname{tg} y)dx + \left(x^2 - x\sec^2 y\right)dy = 0$$

SOLUCIÓN.

Si...

$$F(x,y) = 2xy - \operatorname{tg} y \quad \text{y} \quad G(x,y) = x^2 - x\sec^2 y$$

y...

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x - \sec^2 y \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 2x - \sec^2 y$$

...entonces la ecuación es exacta y cumple con:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F(x,y)$$

$$\partial U = F(x,y)\partial x$$

$$\int \partial U = \int F(x,y)\partial x$$

$$\Rightarrow U = \int F(x,y)\partial x$$

Sustituyendo... $U = \int (2xy - \operatorname{tg} y)\partial x$

$$U = 2y\int x\partial x - \operatorname{tg} y \int \partial x$$

$$U = x^2 y - x\operatorname{tg} y + B(y)$$

Considerando ahora que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = G(x,y)$$

se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - x\sec^2 y + B'(y) = x^2 - x\sec^2 y$$

Simplificando...

$$B'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial B(y) = 0\partial y$$

$$\int \partial B(y) = \int 0\partial y \quad \Rightarrow \quad B(y) = 0$$

Sustituyendo el valor de B(y) en la función solución U(x,y) se obtiene:

$$U = x^2 y - x\operatorname{tg} y$$

Finalmente, considerando que

$$dU = 0 \quad \text{y} \quad \int dU = C$$

La solución general queda:

$$C = x^2 y - x\operatorname{tg} y$$

ATRÁS

LINEALES DE PRIMER ÓRDEN

ÍNDICE

¿Dudas?

Una ecuación que es lineal y de primer orden en la variable dependiente "y", puede expresarse como:

$$A(x)dy + B(x)ydx = C(x)dx$$

Al dividir cada miembro de la ecuación entre A(x) se obtiene:

$$dy + \frac{B(x)}{A(x)}ydx = \frac{C(x)}{A(x)}dx \qquad \Rightarrow \quad dy + P(x)ydx = Q(x)dx$$

La última ecuación representa la forma tipo de una ecuación lineal de primer orden. Buscando resolver este tipo de ecuaciones, se pretende aplicar un factor a todos los términos de manera que esta modificación permita obtener una solución como si fuera una ecuación exacta.

$$v(x)dy + v(x)P(x)ydx = v(x)Q(x)dx$$

Si v(x) representa dicho factor, entonces al aplicarlo a la ecuación se tiene:

$$F(x,y)dx + G(x,y)dy = 0$$

Comparando con la estructura tipo de una ecuación diferencial exacta, es decir

$$F(x,y) = v(x)P(x)y - v(x)Q(x)$$
$$G(y) = v(x)$$

se puede plantear que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$$

Y recordando que para que una ecuación sea exacta debe cumplirse la condición

LINEALES DE PRIMER ÓRDEN

Al aplicar dicha condición a los coeficientes, ya modificados por el factor v(x), de la ecuación lineal:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = v(x)P(x) \quad ; \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{dv}{dx}$$

Igualando ambos resultados...

$$v(x)P(x) = \frac{dv}{dx}$$

Separando variables...

$$P(x)dx = \frac{dv}{v(x)}$$

$$P(x)dx = \frac{dv}{v}$$

Integrando en ambos miembros...

$$\int P(x)dx = \int \frac{dv}{v}$$

$$\int P(x)dx = \ln(v)$$

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\ln(v)}$$

$$e^{\int P(x)dx} = v = v(x)$$

Por lo tanto, la ecuación que determina el factor para transformar la ecuación lineal en exacta es:

$$v(x) = e^{\int P(x)dx}$$

ÍNDICE

¿Dudas?

EJERCICIOS

LINEALES DE PRIMER ÓRDEN

ÍNDICE

¿Dudas?

EJEMPLO:

Determinar la solución general de

$$\left(2y-8x^2\right)dx+(x)dy=0$$

SOLUCIÓN.

Llevando la ecuación a la forma tipo de una ecuación lineal...

$$xdy=-\left(2y-8x^2\right)dx$$

$$dy=\left(-\frac{2y}{x}+8x\right)dx$$

$$dy+\frac{2y}{x}dx=8xdx$$

$$dy+\underbrace{\frac{2}{x}}_{P(x)}ydx=\underbrace{8x}_{Q(x)}dx$$

Calculando el factor v(x)...

$$v(x)=e^{\int P(x)dx}=e^{\int\frac{2}{x}dx}$$

$$v(x)=e^{2\int\frac{dx}{x}}=e^{2\ln(x)}$$

$$v(x)=e^{\ln\left(x^2\right)}=x^2$$

Aplicando este factor a la ecuación lineal llevada a la forma tipo...

$$x^2dy+x^2\frac{2}{x}ydx=x^2 8xdx$$

$$x^2dy+2xydx=8x^3dx$$

$$\underbrace{\left(2xy-8x^3\right)}_{F}dx+\underbrace{x^2}_{G}dy=0$$

La ecuación debe cumplir con:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=F(x,y)$$

$$\partial U=F(x,y)\partial x$$

$$\int\partial U=\int F(x,y)\partial x$$

$$U=\int F(x,y)\partial x$$

Sustituyendo...

$$U=\int\left(2xy-8x^3\right)\partial x$$

$$U=2y\int xdx-8\int x^3dx$$

$$U=2y\frac{x^2}{2}-8\frac{x^4}{4}+B(y)$$

$$U=yx^2-2x^4+B(y)$$

ATRÁS ADELANTE

LINEALES DE PRIMER ÓRDEN

Considerando ahora que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = G(x,y)$$

se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + B'(y) = x^2$$

Simplificando...

$$B'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad B(x) = \int 0dy = 0$$

Sustituyendo el valor de B(y) en la función solución U(x,y) se obtiene:

$$U = yx^2 - 2x^4$$

Finalmente, considerando que

$$dU = 0 \quad \text{y} \quad \int dU = C$$

La solución general está dada por:

$$C = yx^2 - 2x^4$$

EJEMPLO:

Determinar la solución general de

$$ydx + (3x - xy + 2)dy = 0$$

SOLUCIÓN.

Llevando la ecuación a la forma tipo de una ecuación lineal...

$$dx + \left(\frac{3x - xy + 2}{y}\right)dy = 0$$

$$dx + \frac{3x}{y}dy - \frac{xy}{y}dy + \frac{2}{y}dy = 0$$

$$dx + \left(\frac{3x}{y} - \frac{xy}{y}\right)dy = -\frac{2}{y}dy$$

$$dx + \underbrace{\left(\frac{3-y}{y}\right)}_{P(y)}xdy = -\underbrace{\frac{2}{y}}_{Q(y)}$$

¿Dudas?

ATRÁS ADELANTE

¿Dudas?

Calculando el factor v(y)...

$$v(y) = e^{\int P(y)dy} = e^{\int\left(\frac{3-y}{y}\right)dy}$$

$$v(y) = e^{\int \frac{3}{y}dy - \int dy} = e^{3\int \frac{dy}{y} - \int dy}$$

$$v(y) = e^{3Lny - y} = e^{Lny^3 - y} = y^3 e^{-y}$$

Aplicando este factor a la ecuación lineal llevada a la forma tipo...

$$y^3 e^{-y} dx + \left(\frac{3y^3 e^{-y}}{y} - \frac{y}{y} y^3 e^{-y}\right) x dy = -\frac{2}{y} y^3 e^{-y} dy$$

$$y^3 e^{-y} dx + \left(3y^2 e^{-y} - y^3 e^{-y}\right) x dy = -2y^2 e^{-y} dy$$

$$\underbrace{y^3 e^{-y} dx}_{F} + \underbrace{\left(3xy^2 e^{-y} - y^3 x e^{-y} + 2y^2 e^{-y}\right)}_{G} dy = 0$$

La ecuación debe cumplir con:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F(x,y)$$

$$\partial U = F(x,y)\partial x$$

$$\int \partial U = \int F(x,y)\partial x$$

$$U = \int F(x,y)\partial x$$

Sustituyendo...

$$U = \int y^3 e^{-y} \partial x$$

$$U = y^3 e^{-y} \int \partial x$$

$$U = y^3 e^{-y} x + B(y)$$

Considerando ahora que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = G(x,y)$$

se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y^3 e^{-y} + B'(y) = 3xy^2 e^{-y} - y^3 x e^{-y} + 2y^2 e^{-y}$$

Simplificando...

$$B'(y) = 2y^2 e^{-y} \Rightarrow B(x) = \int 2y^2 e^{-y} dy$$

$$B(x) = -2y^2 e^{-y} - 4ye^{-y} - 4e^{-y} + C$$

Sustituyendo el valor de B(y) en la función solución U(x,y) se obtiene:

$$F = y^3 e^{-y} x - 2y^2 e^{-y} - 4ye^{-y} - 4e^{-y} + C$$

ATRÁS ADELANTE

LINEALES DE PRIMER ÓRDEN

ÍNDICE

¿Dudas?

Ejemplo:

Determinar la solución general de

$$(1+3x\,\text{sen}\,y)dx - x^2\cos y\,dy = 0$$

SOLUCIÓN.

Realizando un cambio de variable...

$$(1+3x\,\text{sen}\,y) - x^2\cos y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$u = \text{sen}\,y \qquad \frac{du}{dy} = \cos y \Rightarrow du = \cos y\,dy$$

Sustituyendo:

$$(1+3xu)dx - x^2du = 0$$

Considerando como variable dependiente a "u"

Llevando la ecuación a la forma tipo de una ecuación lineal...

$$\left(\frac{1+3xu}{x^2}\right)dx - du = 0$$

$$\frac{1}{x^2}dx + \frac{3xu}{x^2}dx - du = 0$$

$$du - \underbrace{\frac{3}{x}}_{P(x)}udx = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{Q(x)}dx$$

Calculando el factor v(x)...

$$v(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int -\frac{3}{x}dx}$$

$$v(x) = e^{-3\int\frac{dx}{x}} = e^{-3Lnx} = e^{Lnx^{-3}} = x^{-3}$$

Aplicando este factor a la ecuación lineal llevada a la forma tipo...

$$x^3du + \frac{3x^3}{x}udx = \frac{x^3}{x^2}dx$$

$$x^3du + 3x^2udx = xdx$$

$$\underbrace{x^3}_{F}du + \underbrace{\left(3x^2u + x\right)}_{G}dx = 0$$

La ecuación debe cumplir con:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F(x,y)$$

$$\partial U = F(x,y)\partial x$$

$$\int \partial U = \int F(x,y)\partial x$$

$$U = \int F(x,y)\partial x$$

ATRÁS ADELANTE

LINEALES DE PRIMER ÓRDEN

ÍNDICE

Sustituyendo...

$$U = \int x^3 \partial u$$

$$U = x^3 \int \partial u$$

$$U = x^3 u + B(x)$$

Considerando ahora que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = G(x, y)$$

se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 u + B'(x) = 3x^2 u + x$$

Simplificando...

$$B'(x) = x \Rightarrow B(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Sustituyendo el valor de B(x) en la función solución

U(x,y) se obtiene: $F = x^3 u + \frac{x^2}{2} + C$

Como u= sen y

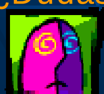
Se realiza el cambio de variable:

$$F = x^3 \operatorname{sen} y + \frac{x^2}{2} + C$$

La solución general está dada por:

$$C = x^3 \operatorname{sen} y + \frac{x^2}{2}$$

¿Dudas?



ATRÁS

TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace de una función f(t) con t>0 se representa por L[f(t)] se define como:

$$\mathrm{L}\left[f(t)\right] = f(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

siempre y cuando la integral exista y donde el parámetro puede ser un número real complejo.

La transformada inversa de Laplace de f(s) es una función f(t)tal que L[f(t)]=f(s).

Para denotar la transformada inversa de Laplace se emplea el símbolo L^{-1}.

Las condiciones suficientes para la existencia de la transformada de Laplace son que la función f(t) sea: Continua a intervalos y de orden exponencial.

Es necesario recordar que para una integral impropia de este tipo se tiene que:

$$\int f(x)dx = \lim_{k \to \infty} \int_{a}^{k} f(x)dx$$

Siempre y cuando el límite exista.

EJERCICIOS

¿Dudas?

ÍNDICE

¿Dudas?

EJEMPLO:

Determinar la transformada de Laplace

$$f(t)=1$$

SOLUCIÓN.

$$\mathcal{L}[1]=\int_0^\infty e^{-st}(1)dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}dt$$

Resolviendo la integral...

s=constante

$$\int_0^k e^{-st}dt=\int_0^k \frac{e^{-st}}{-s}(-s)dt=\frac{1}{-s}\int_0^k e^{-st}(-s)dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^k$$

$$\int_0^k e^{-st}dt=-\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^k=-\frac{e^{-sk}}{s}-\left(-\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)=-\frac{e^{-sk}}{s}+\frac{1}{s}$$

$$\int_0^k e^{-st}dt=\frac{1-e^{-sk}}{s}$$

Calculando el límite de la integral...

$$\underset{k\to\infty}{\text{Lím}}\frac{1-e^{-sk}}{s}=\frac{\underset{k\to\infty}{\text{Lím}}\,1-\underset{k\to\infty}{\text{Lím}}\,e^{-sk}}{\underset{k\to\infty}{\text{Lím}}\,s}=\frac{1-0}{s}=\frac{1}{s}$$

EJEMPLO:

Determinar la transformada de Laplace

$$f(t)=t$$

$$\mathcal{L}[t]=\int_0^\infty e^{-st}tdt=\underset{k\to\infty}{\text{Lím}}\int_0^k e^{-st}t\,dt$$

Resolviendo la integral...

$$\int_0^k e^{-st}tdt=t\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)-\int -\frac{e^{-st}}{s}dt\Big|_0^k$$

$$\int_0^k e^{-st}tdt=-\frac{te^{-st}}{s}-\frac{1}{s^2}e^{-st}=\left[-\frac{te^{-st}}{s}-\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^k$$

Evaluando...

$$\int_0^k e^{-st}tdt=-\frac{ke^{-sk}}{s}-\frac{e^{-sk}}{s^2}+\frac{1}{s^2}$$

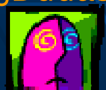
Calculando el límite de la integral...

$$\underset{k\to\infty}{\text{Lím}}\left[-\frac{ke^{-sk}}{s}-\frac{e^{-sk}}{s^2}+\frac{1}{s^2}\right]=\frac{1}{s^2}$$

ATRÁS ADELANTE

ÍNDICE

¿Dudas?



EJEMPLO:

Determinar la transformada de Laplace

$$f(t) = \operatorname{sen} at$$

a = constante

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{sen} at\right] = \int_0^\infty e^{-st}(\operatorname{sen} at)dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-st}(\operatorname{sen} at)dt$$

Resolviendo la integral...

$$\int e^{-st}(\operatorname{sen} at)dt = \left[\operatorname{sen} at\left(-\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_0^k - \int_0^k -\frac{e^{-st}}{s}(a\cos at)dt$$

$$\int_0^k e^{-st}(\operatorname{sen} at)dt = \left[-\frac{e^{-st}\operatorname{sen} at}{s}\right]_0^k - \frac{a}{s}\int_0^k -e^{-st}(\cos at)dt$$

$$\int_0^k = -\frac{e^{-st}\operatorname{sen} at}{s}\Big|_0^k - \frac{a}{s}\left\{\cos at\left(\frac{e^{-st}}{s}\right) - \int_0^k \frac{e^{-st}}{s}(-a\operatorname{sen} at)dt\right\}$$

$$\int_0^k = -\frac{e^{-st}\operatorname{sen} at}{s}\Big|_0^k - \frac{a}{s}\cos at\frac{e^{-st}}{s}\Big|_0^k - \frac{a^2}{s^2}\int_0^k e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt$$

$$\int_0^k e^{-st}(\operatorname{sen} at)dt\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right) = -\frac{e^{-st}\operatorname{sen} at}{s}\Big|_0^k - \frac{a}{s^2}\cos at\, e^{-st}\Big|_0^k$$

$$\int e^{-st}\operatorname{sen}(at)dt =_0^k \left.\frac{-\dfrac{e^{-st}Sen at}{s} - \dfrac{a}{s^2}Cos at e^{-st}}{\left(1+\dfrac{a^2}{s^2}\right)}\right|_0^k$$

Evaluando la integral...

$$\int_0^k e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt = \frac{-\dfrac{e^{-sk}Sen ak}{s} - \dfrac{a}{s^2}Cos ak e^{-sk} + \dfrac{a}{s^2}}{1+\dfrac{a^2}{s^2}}$$

Calculando el límite...

$$\lim_{k\to\infty}\int e^{-st}Sen at\,dt = \frac{a}{s^2+a^2}$$

SOLUCIÓN

ATRÁS ADELANTE

TRANSFORMADA DE LAPLACE

ÍNDICE

¿Dudas?

PROPIEDAD DE LINEALIDAD

La transformada de Laplace es una operación lineal; esto quiere decir que para las funciones f(t) y g(t) cuyas transformadas de Laplace existen, se tiene:

$$a)\ \mathcal{L}\left[f(t)+g(t)\right]=\mathcal{L}\left[f(t)\right]+\mathcal{L}\left[g(t)\right]$$
$$b)\ \mathcal{L}\left[af(t)\right]=a\mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

Por lo tanto, la transformada de Laplace es un operador integral que lleva a cabo una transformación lineal.

Condiciones Suficientes para la existencia de la transformada de Laplace.

Las condiciones suficientes son que la función sea:

a)Continua a Intervalos.- Si la función está definida sobre un intervalo [a,b] y es tal que el intervalo puede subdividirse en un número grande pero finito de intervalos en cada uno de los cuales la funciones continua y tiene límite finito cuando la variable independiente tiende hacia cualquiera de los puntos extremos del intervalo de subdivisión, desde el interior.

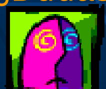
b)De orden exponencial.- Que |f(t)| no crezca "demasiado rápido" conforme t tiende a infinito.

Transformada de Laplace de Integrales

Sí $g(t)=\int_0^t f(z)dz \quad y \quad g'(t)=f(t)$

además considerando que g(0)=0

¿Dudas?



Transformadas de Laplace de derivadas

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right]=\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt = \underset{k\to\infty}{Lím} \int_0^{k} e^{-st} f'(t)dt$$

Resolviendo la integral...

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^k - \int f(t)\left(-se^{-st}\right)dt$$

Utilizando la definición de Laplace...

$$\int_0^{k} e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^k + s\int_0^k f(t)e^{-st}dt$$

$$\int_0^{k} e^{-st} f'(t)dt = e^{-sk} f(k) - e^{-s(0)} f(0) + s\int_0^k e^{-st} f(t)dt$$

Calculando el límite...

$$\int_0^{k} e^{-st} f'(t)dt = \underset{k\to\infty}{Lím}\, e^{-sk} f(k) - \underset{k\to\infty}{Lím}\, f(0) + s\,\underset{k\to\infty}{Lím} \int_0^k e^{-st} f(t)dt$$

$$\int_0^{k} e^{-st} f'(t)dt = e^{-s\infty} f(\infty) - f(0) + s\mathcal{L}\left[f(t)\right] = -f(0) + s\mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$= sf(s) - f(0)$$

La solución es :

$$\therefore \mathcal{L}\left[f'(t)\right] = sf(s) - f(0) \rightarrow \text{Primera derivada}$$

EJEMPLO:

Obtener la transformada de Laplace de Sen(at) aplicando el concepto de transformada de derivadas

$$Si\;\; f(t) = \cos at \Rightarrow f'(t) - a \operatorname{sen} at$$

$$\frac{d \cos at}{dt} = -a \operatorname{sen} at \Rightarrow -\frac{1}{a}(\cos at)' = \operatorname{sen} at$$

$$\mathcal{L}\left[-\frac{1}{a}(\cos at)'\right] = -\frac{1}{a}\mathcal{L}\left[(\cos at)'\right]$$

$$\text{La primera derivada es}: s\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[-\frac{1}{a}(\cos at)'\right] = -\frac{1}{a}\left[s\mathcal{L}\left(\cos at\right) - 1\right]$$

En la tabla se busca el resultado de la transformada de la función f(t)=Cos at

$$\mathcal{L}\left[-\frac{1}{a}(\cos at)'\right] = -\frac{1}{a}\left[s\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) - 1\right]$$

$$\mathcal{L}\left[-\frac{1}{a}(\cos at)'\right] = \frac{a}{s^2+a^2} \rightarrow Solución$$

ATRÁS ADELANTE

TRANSFORMADA DE LAPLACE

ÍNDICE

¿Dudas?

TEOREMA DE TRANSLACIÓN

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = \int e^{-st} f(t)dt = f(s)$$

entonces

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)dt = \int_0^\infty e^{(at-st)} f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = \int e^{(a-s)t} f(t)dt = \int e^{-(s-a)} f(t)dt = f(s-a)$$

En palabras, se obtiene la transformada de Laplace de e^{at} f(t)sustituyendo s por s-a en la transformada de Laplace de F(t).

Transformación de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

1. Transformar las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

2. Resolver estas ecuaciones para las incógnitas algebraicas.

3. Determinar la transformada inversa de los resultados del paso anterior y así obtener la solución de la ecuación diferencial original.

Consideremos que Y=f(t)=f(s) se obtiene:

$$\mathcal{L}\,[Y] = Y[s]$$

$$\mathcal{L}\,[Y'] = sY[s] - Y[0]$$

$$\mathcal{L}\,[Y''] = s^2 Y[s] - sY(0) - Y'(0)$$

$$\mathcal{L}\,[Y'''] = s^3 Y(s) - s^2 Y(0) - sY'(0) - Y''(0)$$

ATRÁS ADELANTE

¿Dudas?

EJEMPLO:

Determinar la solución general de:

$$y''+5y'+6y=0 \qquad y(0)=2 \qquad y'(0)=-3$$
$$f(t)''+5f(t)'+6f(t)=0 \qquad f(0)=2 \qquad f'(0)=-3$$

Aplicando la transformada a cada término de la ecuación y aplicando la propiedad de linealidad...

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right]+5\mathcal{L}\left[f'(t)\right]+6\mathcal{L}\left[f(t)\right]=0$$

Sustituyendo el valor de la 2da, 1era y la función f(t)

$$s^2 f(s)-sf(0)-f'(0)+5\{sf(s)-f(0)\}+6f(s)=0$$

Sustituyendo las condiciones iniciales...

$$f(0)=2 \qquad f'(0)=-3$$
$$s^2 f(s)-2s+3+5sf(s)-10+6f(s)=0$$

Factorizando...

$$f(s)\left[s^2+5s+6\right]-2s-7=0$$
$$f(s)=\frac{7+2s}{s^2+5s+6}$$
$$f(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\mathcal{L}\left[y\right]=\frac{7+2s}{s^2+5s+6}$$

Buscando en la tabla de transformadas, en este caso no hay ningún f(s) por lo tanto voy a factorizar al denominador...

$$\frac{7+2s}{s^2+5s+6}=\frac{7+2s}{(s+3)(s+2)}=\frac{A}{s+3}+\frac{B}{s+2}$$
$$7+2s=As+2A+Bs+3B$$

Factorizando a “s”...

$$7+2s=(A+B)s+2A+3B$$

Resolviendo el siguiente sistemas de ecuaciones:

$$A+B=2 \rightarrow Ec.1$$
$$2A+3B=7 \rightarrow Ec.2$$
$$A=-1 \qquad B=3$$

Sustituyendo los valores de A y B

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7+2s}{s^2+5s+6}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+3}+\frac{3}{s+2}\right]$$

Utilizando la propiedad de linealidad

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7+2s}{s^2+5s+6}\right]=-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]+3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]$$

ATRÁS

ADELANTE

TRANSFORMADA DE LAPLACE

ÍNDICE

Buscando en la tabla de la transformada de Laplace el valor de f(s)

$f(t)$	$f(t)$
e^{at}	$\frac{1}{\text{s - a}}$

Sustituyendo el valor de f(t)...

$$\mathrm{L}^{-1} = \left[\frac{7+2s}{s^2+5s+6}\right] = -e^{at} + 3e^{at}$$

Sustituyendo el valor de a...

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{7+2s}{s^2+5s+6}\right] = -e^{-3t} + 3e^{-2t}$$

La solución general está dada por:

$$f(t) = -e^{-3x} + 3e^{-2x} = y$$

¿Dudas?

ATRÁS

VARIABLES SEPARABLES (SEPARACIÓN DE VARIABLES)

Considerando que la forma típica de una ecuación diferencial de primer orden es $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

puede suceder que la función f(x,y) sea tal que las variables puedan separarse de modo que la ecuación pueda expresarse como $F(x)dx + G(y)dy = 0$

y así obtener la solución general de la ecuación mediante $\int F(x)dx + \int G(y)dy = C$

Siendo C una constante arbitraria.

ÍNDICE

EJEMPLO:

Determinar la solución general de

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-2y}$$

SOLUCIÓN.

$$\frac{dy}{dx} = e^{x}e^{-2y}$$

$$\frac{dy}{e^{-2y}} = e^{x}dx$$

$$\int \frac{dy}{e^{-2y}} = \int e^{x}dx$$

$$\int e^{2y}dy = \int e^{x}dx$$

$$\int \frac{2}{2}e^{2y}dy = \int e^{x}dx$$

$$\frac{1}{2}\int 2e^{2y}dy = \int e^{x}dx$$

$$\frac{1}{2}e^{2y} = e^{x} + C_1$$

$$\frac{1}{2}e^{2y} - e^{x} = C_1$$

$$\frac{1}{2}e^{2y} - e^{x} = C_1$$

$$2\frac{1}{2}e^{2y} - 2e^{x} = 2C_1$$

$$e^{2y} - 2e^{x} = C_2$$

$$\therefore$$

La solución general es

$$e^{2y} - 2e^{x} = C$$

EJERCICIOS

¿Dudas?

VARIABLES SEPARABLES (SEPARACIÓN DE VARIABLES) 1 / 5

¿Dudas?

EJERCICIO 1:

Determinar la solución general de $x\dfrac{dy}{dx} = 2y$

SOLUCIÓN (Opción 1).

$$xdy = 2ydx$$

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}Ln(y) = Ln(x) + C_1$$

$$Ln(y)^{½} = Ln(x) + C_1$$

$$Ln(y)^{½} - Ln(x) = C_1$$

$$Ln\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x}\right) = C_1$$

$$e^{Ln\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x}\right)} = e^{C_1}$$

$$e^{Ln\left(\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x}\right)} = e^{C_1}$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x} = C_2$$

$$y^{\frac{1}{2}} = xC_2$$

$$\sqrt{y} = xC_2$$

$$y = (xC_2)^2$$

$$y = x^2(C_2)^2$$

$$y = x^2 C_3$$

$$\therefore$$

La solución general es

$$y = x^2 C$$

SOLUCIÓN (Opción 2).

$$xdy = 2ydx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$Ln(y) = 2Ln(x) + C_1$$

$$Ln(y) = Ln(x)^2 + C_1$$

$$e^{Ln(y)} = e^{Ln(x)^2 + C_1}$$

$$e^{Ln(y)} = e^{Ln(x)^2} e^{C_1}$$

$$y = x^2 C_2$$

$$\therefore$$

La solución general es

$$y = x^2 C$$

ÍNDICE

¿Dudas?

EJERCICIO 2:

Determinar la solución general de

$$\frac{dr}{d\theta} = r\cos\theta + r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

SOLUCIÓN.

$$\frac{dr}{d\theta} = r(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\frac{dr}{r} = (\cos\theta)d\theta + (\mathrm{sen}\,\theta)d\theta$$

$$\int \frac{dr}{r} = \int(\cos\theta)d\theta + (\mathrm{sen}\,\theta)d\theta$$

$$\int \frac{dr}{r} = \int(\cos\theta)d\theta + \int(\mathrm{sen}\,\theta)d\theta$$

$$Ln(r) = \mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta + C$$

$\therefore$

La solución general es

$$Ln(r) - \mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta = C$$

EJERCICIO 3:

Determinar la solución general de

$$\frac{dy}{dx} = Ln(x^y)$$

SOLUCIÓN.

$$\frac{dy}{dx} = yLn(x)$$

$$\frac{dy}{y} = Ln(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int Ln(x)dx$$

$$Ln(y) = xLn(x) - x + C_1$$

$$Ln(y) = Ln(x)^x - x + C_1$$

$$e^{Ln(y)} = e^{\left[Ln(x)^x - x + C_1\right]}$$

$$y = e^{\left[Ln(x)^x\right]} e^{[-x]} e^{[C_1]}$$

$$y = x^x e^{-x} C_2$$

$\therefore$ La solución general es

$$y = x^x e^{-x} C$$

ATRÁS ADELANTE

VARIABLES SEPARABLES (SEPARACIÓN DE VARIABLES)

ÍNDICE

1. Coeficientes Homogéneos

2. Exactas

3. Lineales de primer orden

4. Transformada Laplace

5. Variables Separadas

6. Variación de Parámetros

¿Dudas?

EJERCICIO 4:

Determinar la solución general de

$$2(y+3)dx-(xy)dy=0$$

SOLUCIÓN.

$$2(y+3)dx = xydy$$

$$\frac{2dx}{x}=\frac{ydy}{y+3}$$

$$2\int\frac{dx}{x}=\int\frac{y}{y+3}dy$$

$$2\int\frac{dx}{x}=\int\frac{y+3-3}{y+3}dy$$

$$2\int\frac{dx}{x}=\int\frac{y+3}{y+3}dy-\int\frac{3}{y+3}dy$$

$$2\int\frac{dx}{x}=\int dy-3\int\frac{dy}{y+3}$$

$$2Ln(x)=y-3Ln(y+3)+C$$

$$Ln(x)^2=y-Ln(y+3)^3+C$$

$\therefore$

La solución general es

$$Ln(x)^2+Ln(y+3)^3-y=C$$

EJERCICIO 5:

Determinar la solución general de

$$(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$$

SOLUCIÓN.

$$(1+y^2)dx=-(1+x^2)dy$$

$$\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{dy}{1+y^2}$$

$$\int\frac{dx}{1+x^2}=-\int\frac{dy}{1+y^2}$$

$$\operatorname{arctg}(1+x^2)=-\operatorname{arctg}(1+y^2)+C$$

$\therefore$ La solución general es

$$\operatorname{arctg}(1+x^2)+\operatorname{arctg}(1+y^2)=C$$

ATRÁS ADELANTE

ÍNDICE

¿Dudas?

EJERCICIO 6:

Determinar la solución particular de

$$2x(y+1)dx - ydy = 0 \quad \text{para} \quad y(0) = -2$$

SOLUCIÓN.

$$2x(y+1)dx = ydy$$

$$2xdx = \frac{ydy}{y+1}$$

$$2\int xdx = \int \frac{y}{y+1} dy$$

$$2\int xdx = \int \frac{y+1-1}{y+1} dy$$

$$2\int xdx = \int \frac{y+1}{y+1} dy - \int \frac{1}{y+1} dy$$

$$2\int xdx = \int dy - \int \frac{dy}{y+1}$$

$$2\frac{x^2}{2} = y - Ln(y+1) + C$$

$\therefore$

La solución general es

$$x^2 = y - Ln(y+1) + C$$

Para determinar la solución particular se procede de la siguiente forma:

Evaluandda condicióny(0)= -2 en la solucióngeneral..

$$(0)^2 = -2 + \ln(-2+1) + C$$

$$0 = -2 + \ln(-1) + C$$

Sin embargo, debido a que el logaritmo natural de un número negativo no está definido, es necesario modificar la forma de la solución general, por lo que, regresando al punto de integración...

$$2\int xdx = \int dy - \int \frac{dy}{y+1}$$

$$2\int xdx = \int dy - \int \frac{(-1)dy}{-1(y+1)}$$

$$2\int xdx = \int dy - \int \frac{-dy}{-y-1}$$

$$2\frac{x^2}{2} = y - Ln(-y-1) + C$$

[ATRÁS] [ADELANTE]

VARIABLES SEPARABLES (SEPARACIÓN DE VARIABLES)

ÍNDICE

$\therefore$

La solución general se considerará ahora como

$$x^2 = y - Ln(-y-1) + C$$

Evaluando la condición y(0) = -2 en la solución general...

$$(0)^2 = -2 + \ln\left(-\left(-2\right)-1\right) + C$$
$$0 = -2 + \ln\left(1\right) + C$$
$$0 = -2 + 0 + C$$
$$2 = C$$

Por lo cual, la solución particular se puede expresar como:

$$x^2 = y - Ln(-y-1) + 2$$

¿Dudas?

ATRÁS

VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Este método se aplica a ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes para obtener una solución general. Lo único que se requiere de la ecuación diferencial

$$f(D)y = R(x) \rightarrow Ec.1$$

es que R(x) tenga un comportamiento adecuado para que las integrales con respecto a él existan.

El primer paso consiste en obtener las raíces de la ecuación auxiliar f(m)=0 y escribir la solución complementaria. Por ejemplo, si la ecuación diferencial es de orden n 2, la solución complementaria viene dada por:

$$Yc = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$$

Donde:

C_1 y C_2 :Son constantes arbitrarias y,

φ_1 y φ_2 :Son funciones conocidas

En el método de variación de parámetros se remplazan las constantes C y C por funciones desconocidas de x, digamos A y B, es decir:

$$Y = A(x)\phi_1(x) + B(x)\phi_2(x) \rightarrow Ec.2$$

Dado que A y B son variables dependientes de x, por eso se le da el nombre al método de variación de parámetros. Ahora se deriva la última ecuación obteniendose:

$$Y' = A'(x)\phi_1(x) + A(x)\phi_1'(x) + B'(x)\phi_2(x) + B(x)\phi_2(x)$$
$$Y' = A(x)\phi_1'(x) + B(x)\phi_2' + A'(x)\phi_1(x) + B'(x)\phi_2(x) \rightarrow Ec.3$$

ÍNDICE

¿Dudas?

VARIACIÓN DE PARÁMETROS

ÍNDICE

¿Dudas?

De la ecuación anterior se impone la condición:

$$A'(x)\phi_1(x) + B'(x)\phi_2(x) = 0 \rightarrow Ec.4$$

Derivando nuevamente la ecuación que queda se tiene:

$$Y'' = A'(x)\phi_1'(x) + A(x)\phi_1''(x) + B'(x)\phi_2'(x) + B(x)\phi_2''(x) \rightarrow Ec.5$$

Finalmente se utiliza las ecuaciones 2, 3 y 5 con la ecuación original 1 para eliminar la variable "Y" para poder obtener una ecuación para A´y B´, de lo cual es posible obtener A y B por medio de integración, con lo que se obtiene la solución particular que sumada con la solución complementaria nos da la solución general.

EJERCICIOS

VARIACIÓN DE PARÁMETROS

ÍNDICE

EJEMPLO:

Determinar la solución general de

$$\left(D^2+1\right)y = Secx\,\mathrm{tg}\,x$$

Obtener la solución complementaria

$$m^2+1=0$$
$$m^2=-1$$
$$m=\pm\sqrt{-1}\Rightarrow \pm i$$
$$m_1=0+i \qquad m_2=0-i$$

Raíces complejas diferentes

$$Y_c = C_1e^{ax}Cosbx + C_2e^{ax}Senbx$$
$$Y_c = C_1Cosx + C_2Senx \rightarrow Sol.complementaria$$

$$Yp = A(x)Cosx + B(x)Senx \rightarrow Sol.particular$$
$$Y'p = -A(x)Senx + A'(x)Cosx + B(x)Cosx + B'(x)Senx$$
$$Si...$$
$$A'(x)Cosx + B'(x)Senx = 0 \rightarrow Ec.1$$

Entonces la primera derivada queda:

$$Y'p = -A(x)Senx + B(x)Cosx$$
$$Y''p = -A(x)Cosx - A'(x)Senx - B(x)Senx + B'(x)Cosx$$

Sustituyendo las derivadas en la ecuación original.

$$-A'(x)Senx + B'(x)Cosx = Secx\,\mathrm{tg}x \rightarrow Ec2$$

Despejando a A´(x):

$$A'(x) = -\frac{B'(x)Senx}{Cosx}$$

Sustituyendo en ecuación 2:

$$B(x)\frac{Sen^2x}{Cosx} + B'(x)Cosx = Secx\,\mathrm{tg}x$$

Factorizando a B´(x)...

$$B'(x) = Secx\,\mathrm{tg}x\cos x$$
$$B'(x) = \mathrm{tg}x$$

Sustituyendo el valor de B´(x) en A´(x)...

$$A'(x) = \frac{-\mathrm{tg}xSenx}{Cosx}$$
$$A'(x) = \frac{-Sen^2x}{Cos^2x}$$

¿Dudas?

ATRÁS ADELANTE

VARIACIÓN DE PARÁMETROS

ÍNDICE

Integrando a A´(x) y B´(x)

$$\frac{dA(x)}{dx} = -\frac{Sen^2 x}{Cos^2 x}$$

$$\int dA(x) = \int \frac{Sen^2 x}{Cos^2 x} dx$$

$$A(x) = -\mathrm{tg}(x) + x$$

$$\int dB(x) = \int \mathrm{tg}\, x dx$$

$$B(x) = LnSecx$$

Sustituyendo el valor de A(x) y B(x) en la solución particular Yp...

$$Yp = [-\mathrm{tg}(x) + x]Cosx + (LnSecx)Senx$$

La solución general está dad por:

$$Y = C_1 Cosx + C_2 Senx + [-\mathrm{tg}(x) + x]Cosx + (LnSecx)Senx$$

ATRÁS

¿Dudas?